Uitwerking tentamen wiskunde 4 NS

22-11-99

I

1a Voor $x > 0$ hebben we $|1-\cos x| \leqslant \int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t = x$ en $|1-\cos x| \leqslant \int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |t|\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2$, waarbij we gebruikt hebben dat $|t| = t$ op $[0, x]$ voor $x > 0$. Hieruit volgt het gestelde.

1b Daar

$$\int_0^\infty \left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

is de functie $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ integreerbaar over $(0, \infty)$. Dat de andere functie niet integreerbaar is behoorde niet tot de vraag, maar hier is de reden: Omdat $|1 - \cos x| \geqslant 1$ op $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$ voor alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ geldt

$$\left|\frac{1-\cos x}{x}\right| \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi]}(x)$$

en deze laatste oneindige som van positieve functies is niet integreerbaar, immers $\int_0^\infty \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[\pi/2+2k\pi,3\pi/2+2k\pi]}(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{3\pi/2+2k\pi}$ en dus is de integraal van de oneindige som groter gelijk aan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{3\pi/2+2k\pi}$, welke divergeert. Dus $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x}$ is niet integreerbaar over $(0, \infty)$.

2 Omdat $t > 0$ geldt $Re(t - i) = t > 0$ en dus

$$\int_0^\infty e^{-tx} \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-tx} Re(e^{ix})\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty Re\big(e^{-(t-i)x}\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$Re \int_0^\infty e^{-(t-i)x}\,\mathrm{d}x = Re\Big(\frac{1}{t-i}\Big) = \frac{t}{t^2+1}.$$

3 Manier 1: Voor $t > 0$ hebben we

$$|F(t)| \leqslant \int_0^\infty \Big|e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}\Big|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty e^{-tx}\mathrm{d}x = \frac{1}{t},$$

en deze gaat naar 0 voor $t \to \infty$.
Manier 2: Gebruik de gedomineerde convergentie stelling. Voor vaste $t > 0$ zijn de functies $x \to e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}$ integreerbaar, want ze worden gedomineerd door de integreerbare functie $x \to e^{-tx}$. Bovendien geldt voor vaste $x > 0$ dat $\lim_{t\to\infty} e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x} = 0$. Tenslotte geldt

$$\Big|e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}\Big| \leqslant e^{-x}, \qquad \text{voor } t \geqslant 1$$

en dus $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$, waarmee het gestelde ook volgt.

4 In feite wordt de vraag gesteld of we onder het integraalteken mogen differentiëren. Wel, de integrand is integreerbaar voor vaste t (zie opgave 3) en voor vaste x is de integrand als functie van t differentiëerbaar op $(0, \infty)$. Kies nu een $\delta > 0$ willekeurig, dan wordt de afgeleide van de integrand naar t gemajoreerd door

$$|e^{-tx}(\cos x - 1)| \leqslant 2e^{-tx} \leqslant 2e^{-\delta x}, \quad t > \delta,$$

welke positief, integreerbaar en onafhankelijk van $t > \delta$ is. Dus F is differentiëerbaar op (δ, ∞). Echter dit geldt voor alle $\delta > 0$, dus de functie is differentieerbaar op $(0, \infty)$ en met behulp van opgave 2 zien we

$$F'(t) = \int_0^\infty e^{-tx}(\cos x - 1)\mathrm{d}x = \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}.$$

5 De vraag is of $\int_0^\infty |F(t)|\, dt$ eindig is. Wel omdat $1 - \cos x \geqslant 0$ voor alle x is de integrand $e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}$ een positieve functie en kunnen we de stelling van Fubini zonder verdere verificatie toepassen om te krijgen

$$\int_0^\infty |F(t)|\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, \mathrm{d}x$$

en deze is eindig, zoals we al eerder hebben gezien.

II

1(i) Omdat de functie even is hebben we

$$\widehat{f}(y) = 2\int_0^\infty f(x)\cos(2\pi xy)\, \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\cos(2\pi xy)}{a}\, \mathrm{d}x = \frac{\sin(2\pi ay)}{2\pi ay}.$$

1(ii) De functie $x \mapsto \frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$ is integreerbaar en, omdat Fourier transformatie convolutie-produkten omzet in 'gewone' produkten, krijgen we

$$\widehat{f}(y) = \frac{\sin^2(2\pi ay)}{4\pi^2 a^2 y^2}.$$

1(iii) Daar $e^{-\pi x^2}$ invariant blijft onder Fourier transformatie hebben we met behulp van schaling (met $\lambda = \sqrt{a/\pi}$)

$$\widehat{f}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{-\frac{\pi^2}{a}y^2}.$$

1(iv) Wederom is de functie even, zodat

$$\widehat{f}(y) = 2\int_0^\infty f(x)\cos(2\pi xy)\, \mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-ax}Re\big(e^{2\pi ixy}\big)\mathrm{d}x =$$

$$2Re\int_0^\infty e^{-(a-2\pi iy)x}\mathrm{d}x = 2Re\Big(\frac{1}{a-2\pi iy}\Big) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2y^2}.$$

2 Voor functies $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$ geldt

$$(\ f \mid g\ ) = (\ \widehat{f} \mid \widehat{g}\ ),$$

waar $(\ f \mid g\ ) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Een bijzonder geval hebben we als $f = g$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

3 We passen Fourier-Plancherel toe op de (reëel-waardige) functie uit 1(i), welke zowel integreerbaar als kwadratisch integreerbaar is:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(2\pi ay)}{4\pi^2a^2y^2}\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a \mathrm{d}x = \frac{1}{2a}.$$

Neem nu $a = \frac{1}{2\pi}$ zodat de gevraagde integraal gelijk wordt aan π.

III

1 Manier 1: Door directe berekening zien we dat rot$F$ gelijk is aan $\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2\right)$. Bovendien wordt S gegeven door de grafiek $z = H(x, y)$ met $H(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ en dan is $N = \left(-\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$. Dus geldt

$$\iint_S \mathrm{rot}F \cdot n \, \mathrm{d}S = \iint_{\{x^2+y^2<1\}} \mathrm{rot}F \cdot N \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$\iint_{\{x^2+y^2<1\}} 2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \cdot \text{ opp. cirkel met straal } 1 = 2\pi.$$

Manier 2: Met behulp van de formule van Stokes zien we

$$\iint_S \mathrm{rot}F \cdot n \, \mathrm{d}S = \int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}\alpha.$$

Nu wordt Γ geparametriseerd door $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ waarbij $t \in [0, 2\pi]$, dus

$$\int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} F[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + 0) \mathrm{d}t = 2\pi.$$

2 Daar $\int_\Gamma F \cdot T \, \mathrm{d}s = \int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}\alpha$ (zie Apostol deel 2, §10.7) is ook hier het anwoord 2π.

3 Met behulp van Stokes geldt $\iint_S \mathrm{rot}F \cdot n \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\alpha$ en daar de rand van onze nieuwe S wederom gelijk is aan Γ is opnieuw het antwoord 2π.

IV

1 Laat $s_n := \sum_{k=1}^n a^k = a\frac{1-a^n}{1-a}$ dan convergeert de rij $(s_n)_n$ dan en slechts dan als $|a| < 1$. Dus de reeks convergeert en convergeert absoluut d.e.s.d.a. $|a| < 1$.

2 De reeks heeft positieve algemene term, dus convergentie en absolute convergentie vallen samen. Voor $\alpha \leqslant 0$ gaat de algemene term niet naar 0, dus zonder verlies van algemeenheid nemen we $\alpha > 0$. In dat geval is de algemene term equivalent met $n^{-\alpha}$, zodat convergentie van $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+n^\alpha}$ equivalent is met convergentie van $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. Met het integraalkenmerk zien we tenslotte

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} < \infty \Longleftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1.$$

3 Wederom heeft de reeks positieve algemene term. Achtereenvolgens het integraalkenmerk en de substitutie $y = \log x$ toepassen geeft ons eenzelfde integraal als hierboven. Dus de reeks convergeert d.e.s.d.a. $\alpha > 1$.

4 De reeks heeft positieve algemene term en $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ is equivelent met $\frac{1}{n}$. Dus de reeks convergeert d.e.s.d.a. de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ convergeert en dit is het geval voor $\alpha + 1 > 1$ ofwel $\alpha > 0$.

5 Bekijk eerst $\sum_{n=1}^\infty \frac{|a|^n}{n!}$. De algemene term is strikt positief voor $a \neq 0$ en in dat geval levert het quotiëntenkenemerk convergentie voor alle $|a| \neq 0$. Voor $|a| = 0$ is convergentie evident, dus de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}$ convergeert absoluut voor alle $a \in \mathbb{C}$. Echter absolute convergentie impliceert convergentie, dus de reeks convergeert voor alle $a \in \mathbb{C}$.

6 Met behulp van Leibniz convergeert de altenerende reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ voor $\alpha > 0$, immers $n^{-\alpha}$ daalt naar 0 voor $\alpha > 0$. De reeks convergeert absoluut voor $\alpha > 1$ (zie ook oefening 2).